多变量微积分笔记21——空间向量场中的通量

向量场 vector field（矢量场）是由一个向量对应另一个向量的函数。向量场广泛应用于物理学，尤其是电磁场。

建立坐标系(x,y,z)。空间中每一点(x_0,y_0,z_0)都可以用由原点指向该点的向量表示。因此，如果空间在所有点对应一个唯一的向量(a,b,c)，那么时空中存在向量场F: (x_0,y_0,z_0)→(a,b,c)

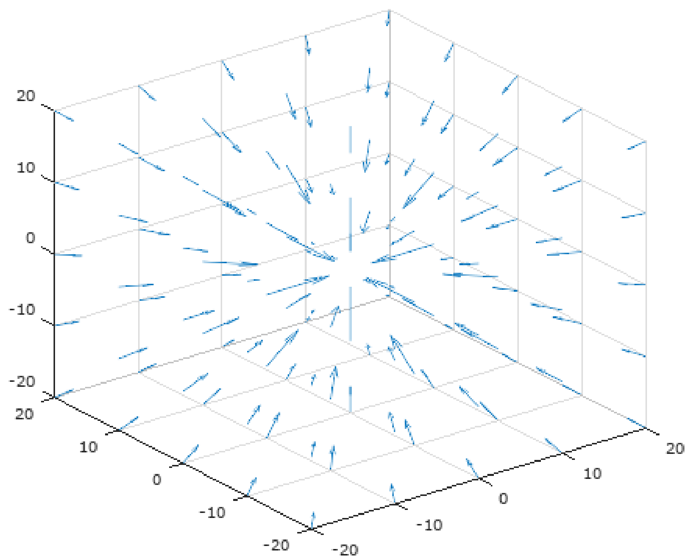
空间向量场

空间向量场与平面向量场类似，在空间中的每个点都有一个向量，它由三个分量PQR表示，这三个分量都是x,y,z的函数：

$$\vec{F} = P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath} + R\hat{k} = \langle P, Q, R\rangle$$

画出平面向量场已经很难，所以通常不要求画出空间向量场，但我们应当知道空间向量场中向量大致的朝向，是发散还是指向原点。空间向量场有着广泛的应用，比如万有引力场，空间中的流体场。

假设一个空间力场由一个指向原点的向量场给出，向量的大小与其到原点的距离的平方成反比，向量场如下图所示：



其中：

$$\vec{F} = \frac{-C\langle x, y, z\rangle}{\rho^2}, \qquad C\ is\ constant, \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

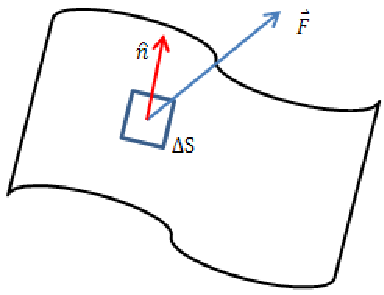
空间中的通量

在《多变量微积分笔记17——通量》介绍了平面向量场中的通量，它度量了单位时间内流体通过曲线的量；空间中的通量与之类似，只不过在三

最新评论

1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

维空间内流体通过的是一个面而不是一条曲线，通量由流体通过的表面积来度量，所以要用面积分而不是线积分。



如上图所示，曲面处于三维空间的向量场**F**中，在每个点上都会产生不同的向量，通量就是**F**在法向量方向的分量。在平面的每一个点上，平面的法向量都有两个，这需要规定其中一个法向量的方向为正方向。对于面积小块ΔS来说，其通量就是单位时间内通过ΔS的流体的量：

$$Flux = \iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dS$$

其中**F•n**就是F在单位法向量n方向的分量，之所以使用dS而不是dA代表面积积元，是因为我们习惯于把dA看成平面坐标中的面积。当向量与曲面相切时，通量为0，此时没有流体流过曲面。

在平面的通量中，用dy,-dx来化简nds：

$$\hat{n}ds = \langle dy, -dx\rangle$$

$$\int_C \vec{F}\cdot\hat{n}dS = \int_C \vec{F}\cdot\langle dy, -dx\rangle$$

在空间中，用向量d**S**化简**n**dS，使向量d**S**与曲面垂直，其模长与面积积元有关：

$$\hat{n}dS = d\vec{S}$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dS = \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

面积分

球面积分

在以a为半径的球面内，求向量场**F** = <x,y,z>的通量。

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解
写的很好，不过LU 分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1（sin和cos）
很nice

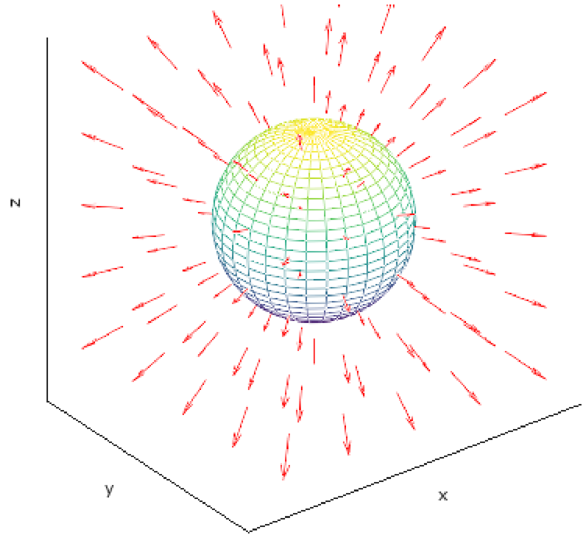
--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)
有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程
提个issue，最速降线中
$ v = {2gh}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立座标系

--trustInU

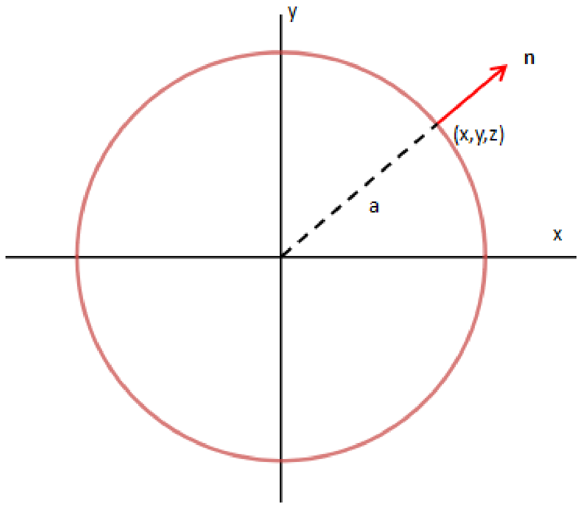


F是从原点向外散射的，所以球面的法向量与F平行，根据公式：

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dS$$

$$\vec{F} = \langle x,y,z\rangle, \qquad \hat{n} = \alpha\langle x,y,z\rangle = \langle\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}\rangle$$

现在需要找到正确的α，使得**n**变成单位法向量。来看球的xy剖面图：



由上图可见：

$$\hat{n} = \langle\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}\rangle = \frac{1}{a}\langle x,y,z\rangle$$

$$x^2+y^2+z^2 = a^2 => a = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

现在，在球面上，**F**在单位法向量**n**方向的分量：

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = |\vec{F}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = a$$

也可以以点积的方式计算：

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = \langle x,y,z\rangle\cdot\frac{1}{a}\langle x,y,z\rangle = \frac{x^2+y^2+z^2}{a}$$

$$x^2+y^2+z^2 = a^2, \qquad so\ \vec{F}\cdot\hat{n} = a$$

最终：

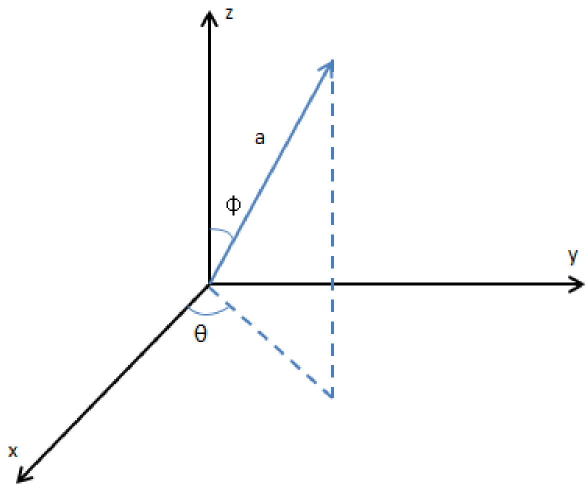
$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_S a dS = a \underbrace{\iint_S dS}_{\text{球面面积}} = 4\pi a^3$$

仍然是同样的球体，现在向量场变成了 H = <0,0,z>，重新计算通量：

$$\vec{H} \cdot \hat{n} = \langle 0,0,z \rangle \cdot \frac{1}{a} \langle x,y,z \rangle = \frac{z^2}{a}$$

$$\iint_S \vec{H} \cdot \hat{n} dS = \iint_S \frac{z^2}{a} dS = \frac{1}{a} \iint_S z^2 dS = ?$$

问题转换为如何求解二重积分，这就需要知道dS是什么以及如何将dS和z参数化。在《多变量微积分笔记20——球坐标系》中介绍了球坐标，现在我们可以用球坐标化替换x,y,z：



$$dS = a^2 sin\emptyset d\emptyset d\theta, \qquad z = acos\emptyset$$

$$\iint_S \frac{z^2}{a} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{a^2 cos^2\emptyset}{a} a^2 sin\emptyset d\emptyset d\theta$$

$$= a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} -cos^2\emptyset dcos\emptyset d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3$$

需要注意的是，由于这里计算的是面积分且dS并不在xy平面，所以无法用dxdy代替dS；但有时候，根据场景的不同，可以用dxdy代替dS，比如求水平面z = a在场中的通量。这里的关键就是明确dS究竟是什么，如果平面平行于yz轴，那么dS = dydz。

总结一下，如果在向量场中存在一个以原点为球心，以a为半径的球，那么：

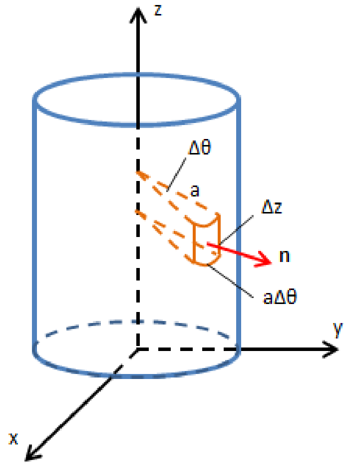
$$\hat{n} = \pm \frac{1}{a} \langle x,y,z \rangle$$

$$dS = a^2 sin\emptyset d\emptyset d\theta$$

n的正负号取决于单位法向量的方向。

柱面积分

现在来看看柱体的面积分。下图是轴心在z轴，半径为a的柱体：



$$\Delta S=\Delta z a\Delta\theta \quad so \quad dS=adzd\theta$$

n与xy平面平行，所以**n**在z方向上的分量是0，因此：

$$\hat{n}=\pm\frac{1}{a}\langle x,y,0\rangle$$

综合示例

示例1

a)　　计算空间向量场F = <0, 0, 1>中，$x^2 + y^2 = 1$的通量。

b)　　计算空间向量场F = <0, 1, 0>中，在xz平面的单位正方形的通量。

a)

很明显$x^2 + y^2 = 1$是一个以z轴为轴心的无限柱体；向量场中的所有向量都与xy平面垂直，没有xy方向的分量，所以 $x^2 + y^2 = 1$的通量是0。

如果计算的话：

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dS=\iint_S\langle 0,0,1\rangle\cdot\langle x,y,0\rangle dS=0$$

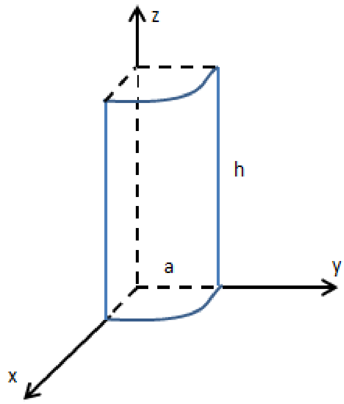
b)

向量场中的所有向量都垂直于xz平面，也就是与正方形的法向量方向相同，所以：

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dS=\iint_S\langle 0,1,0\rangle\cdot\langle 0,\pm 1,0\rangle dS=\pm\underbrace{\iint_S dS}_{\text{正方形的面积}}=\pm 1$$

示例2

如下图所示，求在向量场**F** =<z,x,y>中1/4柱面向外的通量。



从柱面很自然联想到柱坐标系，在柱坐标系中：

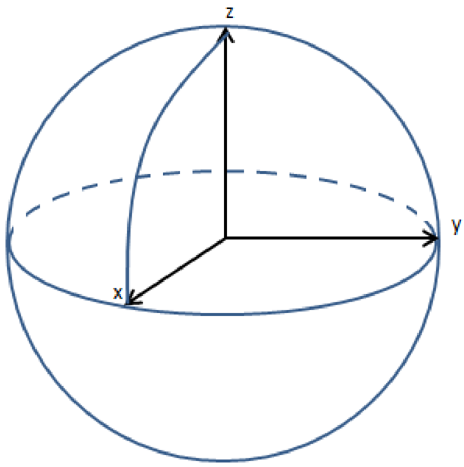
$$\hat{n} = \frac{1}{a}\langle x, y, 0\rangle, \qquad x = acos\theta, \qquad y = asin\theta, \qquad dS = ad\theta dz$$

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = \langle z, x, y\rangle \cdot \frac{1}{a}\langle x, y, 0\rangle = \frac{zx + xy}{a} = zcos\theta + acos\theta sin\theta$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dS = \int_0^h \int_0^{\frac{\pi}{2}} (zcos\theta + acos\theta sin\theta)ad\theta dz = \frac{ah^2 + a^2h}{2}$$

示例3

如下图所示，求在向量场**F** =<xz,yz,z^2>中半径为a的1/4球体在第一象限向外的通量。



在球坐标系中：

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = \langle xz, yz, z^2\rangle \cdot \frac{1}{a}\langle x, y, z\rangle = \frac{x^2z + y^2z + z^2z}{a} = \frac{a^2z}{a} = az$$

$$z = acos\emptyset, \qquad dS = a^2 sin\emptyset d\emptyset d\theta$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dS = \iint_S azdS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4 cos\emptyset sin\emptyset d\emptyset d\theta = \frac{a^4}{4}\pi$$

作者：我是8位的

出处：http://www.cnblogs.com/bigmonkey

扫描二维码关注公众号 "我是8位的"

随笔

分类: 多变量微积分

标签: 空间向量场, 通量, 面积分

« 上一篇： 多变量微积分笔记20——球坐标系
» 下一篇： 线性代数笔记7——再看行列式与矩阵