

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

- 博客园
- 首页
- 新随笔
- 联系
- 订阅
- 管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
 欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
 园龄：4年7个月
 粉丝：288
 关注：5
 +加关注

盖楼抽奖
 #她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
 分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

[马上参与](#)

搜索

常用链接

- 我的随笔
- 我的评论
- 我的参与
- 最新评论
- 我的标签

积分与排名

积分 - 457199
 排名 - 1199

多变量微积分笔记21——空间向量场中的通量

向量场 vector field (矢量场) 是由一个向量对应另一个向量的函数。向量场广泛应用于物理学，尤其是电磁场。

建立坐标系(x,y,z)。空间中每一点(x₀,y₀,z₀)都可以用由原点指向该点的向量表示。因此，如果空间在所有点对应一个唯一的向量(a,b,c)，那么时空中存在向量场F: (x₀,y₀,z₀)→(a,b,c)

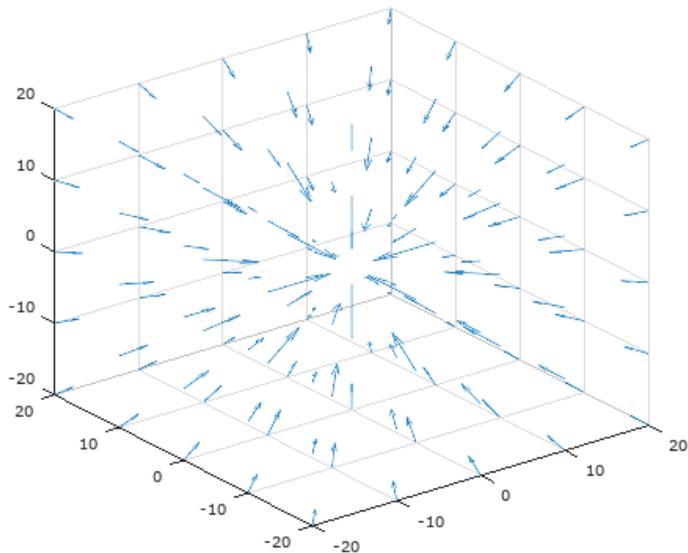
空间向量场

空间向量场与平面向量场类似，在空间中的每个点都有一个向量，它由三个分量PQR表示，这三个分量都是x,y,z的函数：

$$\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k} = \langle P, Q, R \rangle$$

画出平面向量场已经很难，所以通常不要求画出空间向量场，但我们应当知道空间向量场中向量大致的朝向，是发散还是指向原点。空间向量场有着广泛的应用，比如万有引力场，空间中的流体场。

假设一个空间力场由一个指向原点的向量场给出，向量的大小与其到原点的距离的平方成反比，向量场如下图所示：



其中：

$$\vec{F} = \frac{-C\langle x, y, z \rangle}{\rho^2}, \quad C \text{ is constant}, \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

空间中的通量

在《多变量微积分笔记17——通量》介绍了平面向量场中的通量，它度量了单位时间内流体通过曲线的量；空间中的通量与之类似，只不过在三

随笔分类 (211)

★★资源下载★★(1)
 Java并发编程(1)
 程序员的数学(24)
 单变量微积分(31)
 多变量微积分(24)
 概率(24)
 机器学习(27)
 软件设计(1)
 数据分析(6)
 数据结构与算法(27)
 随笔(5)
 线性代数(34)
 项目管理(2)
 转载(4)

随笔档案 (205)

2021年2月(1)
 2020年3月(2)
 2020年2月(6)
 2020年1月(4)
 2019年12月(7)
 2019年11月(15)
 2019年9月(3)
 2019年8月(6)
 2019年7月(1)
 2019年6月(8)
 2019年5月(3)
 2019年4月(5)
 2019年3月(7)
 2019年2月(3)
 2019年1月(7)
 更多

阅读排行榜

1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

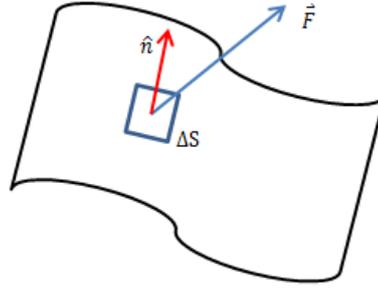
推荐排行榜

1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
 如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
 --猫猫猫猫大人

维空间内流体通过的的是一个面而不是一条曲线, 通量由流体通过的表面积来度量, 所以要用面积分而不是线积分。



如上图所示, 曲面处于三维空间的向量场 \mathbf{F} 中, 在每个点上都会产生不同的向量, 通量就是 \mathbf{F} 在法向量方向的分量。在平面的每一个点上, 平面的法向量都有两个, 这需要规定其中一个法向量的方向为正方向。对于面积小块 ΔS 来说, 其通量就是单位时间内通过 ΔS 的流体的量:

$$Flux = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

其中 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ 就是 \mathbf{F} 在单位法向量 \mathbf{n} 方向的分量, 之所以使用 dS 而不是 dA 代表面积积元, 是因为我们习惯于把 dA 看成平面坐标中的面积。当向量与曲面相切时, 通量为0, 此时没有流体流过曲面。

在平面的通量中, 用 $dy, -dx$ 来化简 $\mathbf{n}dS$:

$$\hat{n}dS = \langle dy, -dx \rangle$$

$$\int_C \vec{F} \cdot \hat{n}dS = \int_C \vec{F} \cdot \langle dy, -dx \rangle$$

在空间中, 用向量 $d\vec{S}$ 化简 $\mathbf{n}dS$, 使向量 $d\vec{S}$ 与曲面垂直, 其模长与面积积元有关:

$$\hat{n}dS = d\vec{S}$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}dS = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

面积分

球面积分

在以 a 为半径的球面内, 求向量场 $\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$ 的通量。

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos)

很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

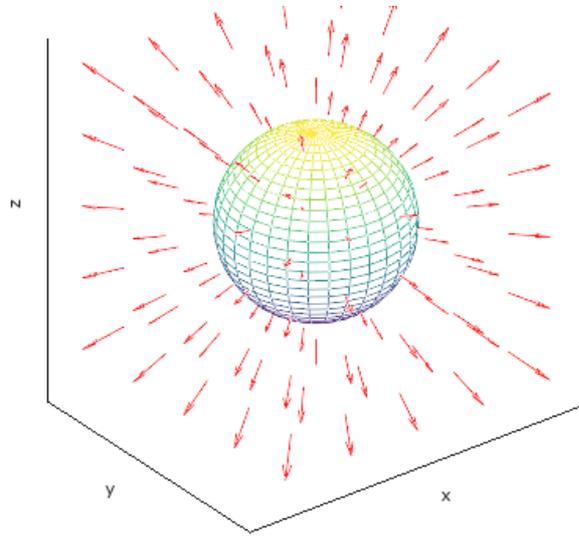
--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

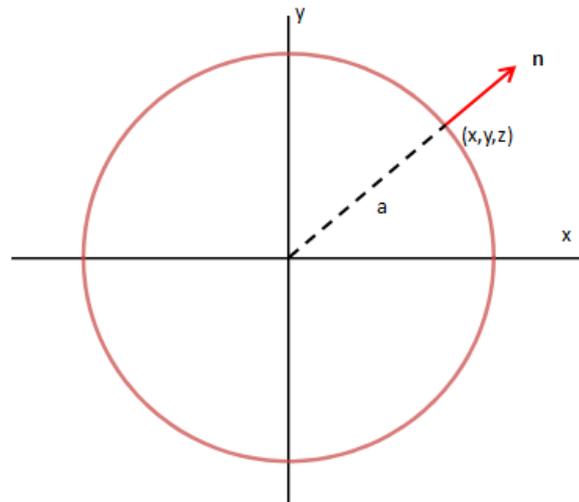


F是从原点向外散射的，所以球面的法向量与F平行，根据公式：

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

$$\vec{F} = \langle x, y, z \rangle, \quad \hat{n} = \alpha \langle x, y, z \rangle = \langle \hat{i}, \hat{j}, \hat{k} \rangle$$

现在需要找到正确的 α ，使得 \mathbf{n} 变成单位法向量。来看球的xy剖面图：



由上图可见：

$$\hat{n} = \langle \hat{i}, \hat{j}, \hat{k} \rangle = \frac{1}{a} \langle x, y, z \rangle$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

现在，在球面上，F在单位法向量 \mathbf{n} 方向的分量：

$$\vec{F} \cdot \hat{n} = |\vec{F}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a$$

也可以以点积的方式计算：

$$\vec{F} \cdot \hat{n} = \langle x, y, z \rangle \cdot \frac{1}{a} \langle x, y, z \rangle = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad \text{so } \vec{F} \cdot \hat{n} = a$$

最终：

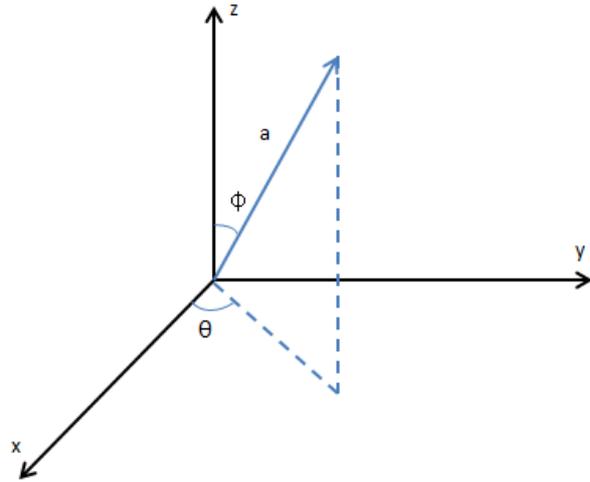
$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_S a dS = a \underbrace{\iint_S dS}_{\text{球面积}} = 4\pi a^3$$

仍然是同样的球体，现在向量场变成了 $H = \langle 0, 0, z \rangle$ ，重新计算通量：

$$\vec{H} \cdot \hat{n} = \langle 0, 0, z \rangle \cdot \frac{1}{a} \langle x, y, z \rangle = \frac{z^2}{a}$$

$$\iint_S \vec{H} \cdot \hat{n} dS = \iint_S \frac{z^2}{a} dS = \frac{1}{a} \iint_S z^2 dS = ?$$

问题转换为如何求解二重积分，这就需要知道 dS 是什么以及如何将 dS 和 z 参数化。在《多变量微积分笔记20——球坐标系》中介绍了球坐标，现在我们可以用球坐标化替换 x, y, z ：



$$dS = a^2 \sin\theta d\theta d\phi, \quad z = a \cos\theta$$

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{z^2}{a} dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{a^2 \cos^2\theta}{a} a^2 \sin\theta d\theta d\phi \\ &= a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -\cos^2\theta d\cos\theta d\phi \\ &= \frac{4}{3} \pi a^3 \end{aligned}$$

需要注意的是，由于这里计算的是面积分且 dS 并不在 xy 平面，所以无法用 $dx dy$ 代替 dS ；但有时候，根据场景的不同，可以用 $dx dy$ 代替 dS ，比如求水平面 $z = a$ 在场中的通量。这里的关键就是明确 dS 究竟是什么，如果平面平行于 yz 轴，那么 $dS = dy dz$ 。

总结一下，如果在向量场中存在一个以原点为球心，以 a 为半径的球，那么：

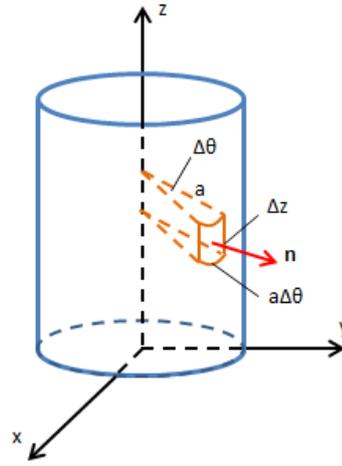
$$\hat{n} = \pm \frac{1}{a} \langle x, y, z \rangle$$

$$dS = a^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

n 的正负号取决于单位法向量的方向。

柱面积分

现在来看看柱体的面积分。下图是轴心在z轴，半径为a的柱体：



$$\Delta S = \Delta z a \Delta \theta \quad \text{so} \quad dS = a dz d\theta$$

\mathbf{n} 与xy平面平行，所以 \mathbf{n} 在z方向上的分量是0，因此：

$$\hat{\mathbf{n}} = \pm \frac{1}{a} \langle x, y, 0 \rangle$$

综合示例

示例1

- a) 计算空间向量场 $\mathbf{F} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ 中， $x^2 + y^2 = 1$ 的通量。
- b) 计算空间向量场 $\mathbf{F} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ 中，在xz平面的单位正方形的通量。

a)

很明显 $x^2 + y^2 = 1$ 是一个以z轴为轴心的无限柱体；向量场中的所有向量都与xy平面垂直，没有xy方向的分量，所以 $x^2 + y^2 = 1$ 的通量是0。

如果计算的话：

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_S \langle 0, 0, 1 \rangle \cdot \langle x, y, 0 \rangle dS = 0$$

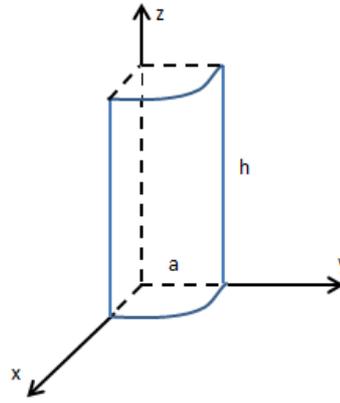
b)

向量场中的所有向量都垂直于xz平面，也就是与正方形的法向量方向相同，所以：

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_S \langle 0, 1, 0 \rangle \cdot \langle 0, \pm 1, 0 \rangle dS = \pm \underbrace{\iint_S dS}_{\text{正方形的面积}} = \pm 1$$

示例2

如下图所示，求在向量场 $\mathbf{F} = \langle z, x, y \rangle$ 中1/4柱面向外的通量。



从柱面很自然联想到柱坐标系，在柱坐标系中：

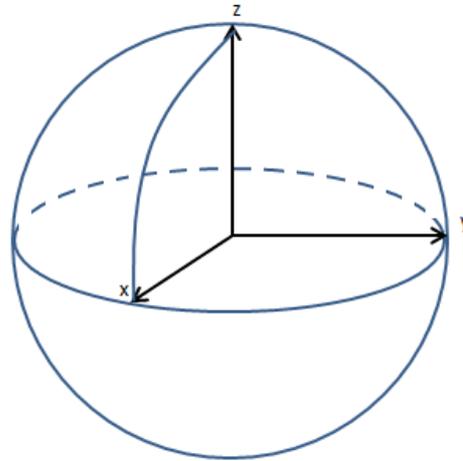
$$\hat{n} = \frac{1}{a} \langle x, y, 0 \rangle, \quad x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta, \quad dS = a d\theta dz$$

$$\vec{F} \cdot \hat{n} = \langle z, x, y \rangle \cdot \frac{1}{a} \langle x, y, 0 \rangle = \frac{zx + xy}{a} = z \cos \theta + a \cos \theta \sin \theta$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int_0^h \int_0^{\frac{\pi}{2}} (z \cos \theta + a \cos \theta \sin \theta) a d\theta dz = \frac{ah^2 + a^2 h}{2}$$

示例3

如下图所示，求在向量场 $\mathbf{F} = \langle xz, yz, z^2 \rangle$ 中半径为 a 的 $1/4$ 球体在第一象限向外的通量。



在球坐标系中：

$$\vec{F} \cdot \hat{n} = \langle xz, yz, z^2 \rangle \cdot \frac{1}{a} \langle x, y, z \rangle = \frac{x^2 z + y^2 z + z^2 z}{a} = \frac{a^2 z}{a} = az$$

$$z = a \cos \phi, \quad dS = a^2 \sin \phi d\phi d\theta$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_S az dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4 \cos \phi \sin \phi d\phi d\theta = \frac{a^4}{4} \pi$$

作者：我是8位的

出处：<http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: [多变量微积分](#)

标签: [空间向量场](#), [通量](#), [面积分](#)

好文要顶 关注我 收藏该文  

 **我是8位的**
 关注 - 5
 粉丝 - 288
 +加关注

0 0
 推荐 反对

« 上一篇: [多变量微积分笔记20——球坐标系](#)
 » 下一篇: [线性代数笔记7——再看行列式与矩阵](#)

posted on 2018-05-30 13:51 我是8位的 阅读(2783) 评论(1) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

 登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

- 【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事
- 【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

yozodcs.com

永中DCS, 文档在线预览处理专家

10年行业经验, 受到众多政府客户、央企单位、邮箱客户、OA办公系统、招聘网站、教育客户青睐

[了解详情](#)

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手锏 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
 活动时间: 2022年3月8日-3月18日



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
- 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房

- 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能, 可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人: 本金63万, 月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:

博客园

Copyright © 2022 我是8位的

Powered by .NET 6 on Kubernetes